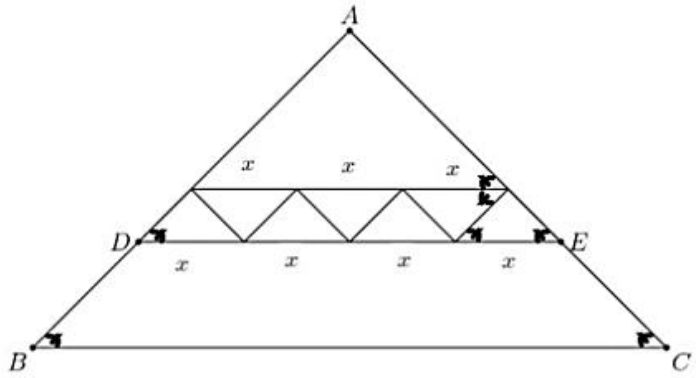
GABARITO

1	A	B	C	D	**E**	21	A	**B**	C	D	E
2	**A**	B	C	D	E	22	A	B	C	D	**E**
3	**A**	B	C	D	E	23	A	B	C	D	**E**
4	A	B	C	**D**	E	24	A	**B**	C	D	E
5	A	B	C	**D**	E	25	A	B	C	D	**E**
6	**A**	B	C	D	E	26	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	**E**	27	A	B	**C**	D	E
8	A	B	**C**	D	E	28	**A**	B	C	D	E
9	A	B	C	**D**	E	29	A	B	C	D	E
10	A	B	**C**	D	E	30	A	B	C	**D**	E
11	A	B	C	D	**E**	31	A	**B**	C	D	E
12	A	B	C	**D**	E	32	A	B	C	**D**	E
13	A	B	C	D	**E**	33	**A**	B	C	D	E
14	**A**	B	C	D	E	34	A	B	**C**	D	E
15	A	B	**C**	D	E	35	A	B	**C**	D	E
16	A	B	C	**D**	E	36	**A**	B	C	D	E
17	A	B	**C**	D	E	37	A	B	**C**	D	E
18	A	**B**	C	D	E	38	A	B	C	D	**E**
19	**A**	B	C	D	E	39	A	B	C	**D**	E
20	A	**B**	C	D	E	40	A	**B**	C	D	E

1. ALTERNATIVA E

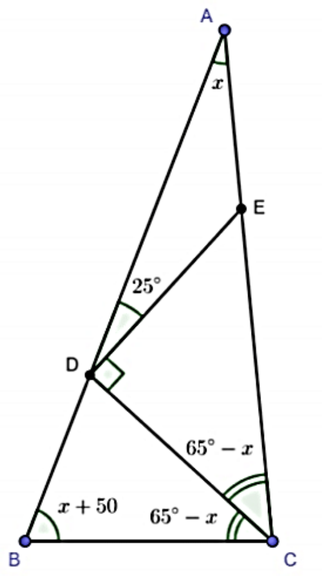
Seja x com comprimento da base de cada um dos triângulos menores de área 1 . Veja que o triângulo ADE também será semelhante ao ABC, pois tem os ângulos da base iguais, e tem base $4x$. Portanto, a área do ADE é $4^2 = 16$ vezes a área do triângulo menor que é 16. Daí a área do DBCE é dada por

$$[DBCE] = [ABC] - [ADE] = 40 - 16 = 24$$



OBS: podemos também encontrar a área do triângulo formado por A até os triângulos menores de duas formas : base $3x$ implicando área $3^2.1 = 9$ ou $16 - 7.1 = 9$

2. ALTERNATIVA A



Seja $\angle BAC = x$. Pela equação $\angle ABC - \angle BAC = 50°$, temos $\angle ABC = x + 50°$. Somando os ângulos internos do triângulo ABC, temos $\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 130 - 2x$.
Segundo CD bissetriz, temos $\angle DCB = \angle DCA = 65° - x$. Pela soma dos ângulos internos do triângulo ADC, temos $\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle DCA = 115°$. Finalmente, temos $\angle ADE = \angle ADC - \angle EDC = 115° - 90° = 25°$.

3. ALTERNATIVA A

Note que $a^2 = x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y}).(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \frac{a^2}{b}$. Adicionando $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = b$ e $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \frac{a^2}{b}$, temos $2\sqrt{x} = b + \frac{a^2}{b}$ e subtraindo $2\sqrt{y} = b - \frac{a^2}{b}$. Fazendo o produto das duas últimas equações temos $4\sqrt{xy} = \left(b + \frac{a^2}{b}\right).\left(b - \frac{a^2}{b}\right) \rightarrow \sqrt{xy} = \frac{b^4 - a^4}{4b^2}$

4. ALTERNATIVA D

Primeiro faremos casos pequenos para entender o padrão

$$8\,.\,8 = 64\,;8\,.\,88 = 704\,;8\,.\,888 = 7104\,;8\,.\,8888 = 71104$$

Para $k = 1{,}2{,}3\ e\ 4$ temos uma soma dos dígitos $10, 11\ ,12\ e\ 13$, respectivamente. Então nosso palpite é que para cada k a soma dos dígitos é $k + 9$. Se provaros isso, a soma é 1000 para $k + 9 = 1000 \rightarrow k = 991$.
Mais exatamente, o resultado é da forma $7111 \ldots 104$ com $k - 2$ algarismos uns em sequência.
Podemos provar por indução

$$8\,.\,888 \ldots 8 = 8\,.\,800 \ldots 0 + 8\,.\,888 \ldots 8 = 64000 \ldots 0 + 7111 \ldots 104$$

A primeira parcela tem $k - 1$ zeros e a segunda parcela $k - 1 - 2 = k - 3$ uns. Assim, os dígitos mais significativos são $64 + 7 = 71$ deslocando 7 e adicionando 1 no bloco de algarismos 1.
O bloco novo tem $k - 3 + 1 = k - 2$ algarismos 1.
A soma dos algarismos é $7 + (k - 2)1 + 0 + 4 = k + 9$ como havíamos adiantado.

5. ALTERNATIVA D

Veja que a soma dos ângulos dos três triângulos juntos é $3\,.\,180° = 540\ °$. Porém, foram apagados os ângulos em torno do ponto B e formam o ângulo $\angle ABC$. Como $A, B\ e\ C$ estão alinhados $\angle ABC = 180°$. Assim, a soma dos ângulos em cinza é $540° - 180° = 360\ °$.

6. ALTERNATIVA A

Sendo $q \in \mathbb{N}$, podemos desenvolver para completar quadrados e depois fazer a diferença de quadrados chegando a

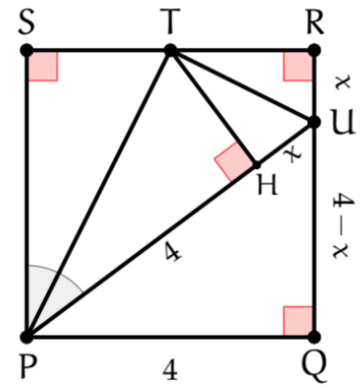
$$n^2 + 85n + 2017 = q^2$$
$$(2n + 85)^2 + 4.2017 - 85^2$$
$$\left(2q + (2n + 85)\right).\left(2q - (2n + 85)\right) = 843$$

que pode ser escrito como $843 = 1.843 = 3\,.281$. Sendo assim, ficamos com

$$\begin{cases} 2q + (2n + 85) = 843 \\ 2q - (2n + 85) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2q + (2n + 85) = 281 \\ 2q - (2n + 85) = 3 \end{cases} \rightarrow$$
$$\begin{cases} 2q + (2n + 85) = 3 \\ 2q - (2n + 85) = 281 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2q + (2n + 85) = 1 \\ 2q - (2n + 85) = 843 \end{cases}$$

As diferenças entre as equaçõs nos doisprimeiros sistemas geram $2(2n + 85) = 842$ e $2(2n + 85) = 278$, como $n \in \{168{,}27\}\ e\ 168 + 27 = 195$, para os dois últimos sistemas teremos $n \notin \mathbb{Z}_+^*$.

7. ALTERNATIVA E



De início, defina $RU = x$ e conclua $UQ = 4 - x$. Depois, destaque o ΔTPU e trace a sua altura TH. Daí, perceba que ΔPST é congruente a ΔPHT, pelo caso AAA e hipotenusa comum, concluindo $PS = PH = 4\ cm$. Analogamente, $\Delta URT \equiv \Delta UHT$ e $RU = UH = x$. Aplicando o teorema de pitágoras no ΔPQU chegamos a

$$4^2 + (4 - x)^2 = (4 + x)^2 \rightarrow x = 1\ cm$$

8. ALTERNATIVA C

Vejamos as possibilidades para que o produto de dois números de dois algarismos seja $1656 = 2^3.3^2.23$. O fator 23 nos ajuda a limitar as possibilidades, pois $23.5 = 115$ que já teria mais que 2 algarismos. Então 23 só nossos casos são $23x72, 46x36, 69x24\ e\ 92x18$.
Observe que na operação ao multiplicar o algarismo das dezenas do número de baixo pelo número de cima resulta em um número de dois algarismos. Isso só é possível usando 18 em baixo e 92 em cima. Então a soma dos números multiplicados é $18 + 92 = 110$.

9. ALTERNATIVA D

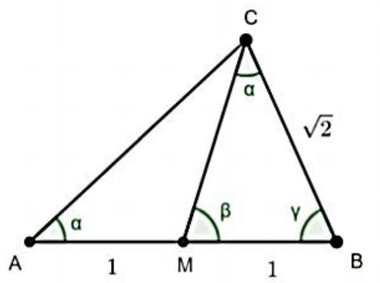
Separando as partes que formam $(x+y)^2$, temos $x^2 + 6xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 4xy = (x+y)^2 + 4xy = 8^2 + 4.15 = 124$

10. ALTERNATIVA C

Como M é o ponto médio de AB, temos $MA = MB = 1$. Os triângulos $MBC\ e\ CBA$ são semelhantes por LAL, já que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{MB}{CB} = \frac{BC}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e $\angle MBC = \angle CBA = \beta$. Com isso, $\angle BCM = \angle BAC = \alpha$.



Pela soma dos ângulos triângulos ABC temos $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

11. ALTERNATIVA E

Veja que o algarismo das unidades é o resto da divisão por 10. Pelo teorema dos Restos, o algarismo da uidades de 13^{2018} é igual ao algarismo das unidades de 3^{2018}. Veja que $3^4 = 81$ deixa resto 1 por 10 e, consequentemente, $3^{2016} = (3^4)^{504}$ deixa o mesmo resto que $1^{504} = 1$ por 10. Logo, 3^{2018} edixa o mesmo resto por 10 que $3^{2018} = 3^{2016}.3^2$ que deixa resto $1 . 9 = 9$.

12. ALTERNATIVA D

$(10^{12} + 2500)^2 - (10^{12} - 2500)^2 = 10^n \rightarrow$
$10^{24} + 2.10^{12}.2500 + 2500^2 - 10^{24} + 2.10^{12}.2500 - 2500^2 = 10^n \rightarrow$
$4.10^{12}.2500 = 10^n \rightarrow$
$10^n = 10^{16} \rightarrow n = 16$

13. ALTERNATIVA E

Veja que

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = (2^4)^2 + 2 . 2^4 . 2^6 + 2^n = (2^4)^2 + 2 . 2^4 . 2^6 + (2^{\frac{n}{2}})^2$$

Se $\frac{n}{2} = 6 \rightarrow n = 12$, temos

$$(2^4)^2 + 2 . 2^4 . 2^6 + (2^6)^2 = (2^4 + 2^6)^2$$

Que é um quadrado perfeito.

14. ALTERNATIVA A

Veja que

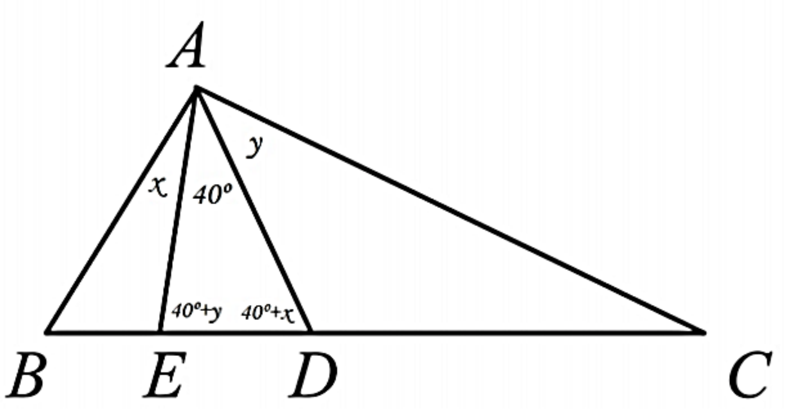
$$a * b = (a + 1).(b - 1) = ab - a + b + 1 = 24$$
$$b * a = (b + 1).(a - 1) = ba - b + a + 1 = 30$$

E somando as expressões $2(ab - 1) = 27 \rightarrow ab = 28$. Com esse valor na segunda equação $28 - b + a - 1 = 30 \rightarrow a = b + 3$. Logo $b(b + 3) = 28 \rightarrow b^2 + 3b - 28 = 0$.
Resolvendo a equação do segundo grau temos $b = 4$ ou $b = -7$. Como são inteiros positivos temos $(a, b) = (7,4)$ e a soma deles é 11.

OBS : Também poderíamos testar os valores de a e b cujo produto é 28 na suas equações fornecidas no enunciado.

15. ALTERNATIVA C

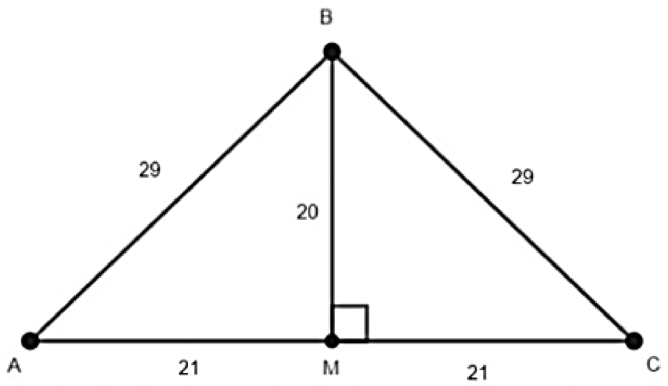
Sejam $\angle BAE = x\ e\ \angle CAD = y$. De $BD = BA$, temos ΔABD isósceles e $\angle BDA = \angle BAD = 40° + x$. Analogamente, de $CE = CA$ temos que ΔACE isósceles e $\angle CEA = \angle CAE = 40 + y$. Considere a figura a seguir



Somando os ângulos internos do triângulo DAE, temos $40 + x + 40 + y = 180 \rightarrow x + y = 60$. Assim, $\angle BAC = x + 40 + y = 100°$

16. ALTERNATIVA D

Trace a altura do triângulo relativa ao vértice B. Como o triângulo é isósceles,$AB = BC$, então ela coincide com a mediana.



Usando o teorema de Pitágoras, temos $BM^2 + MC^2 = AC^2 \rightarrow BM^2 = 29^2 - 21^2 = (29 + 21)(29 - 21) = 50.8 \rightarrow BM = 20$. A área do triângulo é

$$[ABC] = \frac{AC\,.\,BM}{2} = \frac{42.20}{2} = 420$$

17. ALTERNATIVA C

Veja que $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy^2 + 3x^2y = 9 + 3.6 = 27$. Podemos concluir que $x + y = \sqrt[3]{27} = 3$. Veja ainda que $x^2y + xy^2 = xy(x + y)$, implicando em $xy = 2$ e sabendo a soma e o produto dos números, podemos usar a equação do segundo grau $x^2 - 3x + 2 = 0$ para concluir que $x = 1$ e $y = 2$ ou $x = 2$ e $y = 1$.

18. ALTERNATIVA B

Para descobrir x fazemos 2016^{2014} módulo 10 e temos

$$2016^{2014} \equiv 6^{2014} (mod\ 10)$$

Veja que $6^1 \equiv 6(mod\ 10), 6^2 \equiv 6(mod\ 10), 6^3 \equiv 6(mod\ 10)$. Prova-se por indução que $6^n \equiv 6(mod\ 10)$ para todo n inteiro positivo. Concluímos que $x = 6$.
Para descobrir y podemos usar a mesma ideia módulo 11.

$$2014^{2016} \equiv 1^{2016} \equiv 1(mod\ 11)$$

Concluímos que $y = 1$.
Portanto o dia é 6 de janeiro.

19. ALTERNATIVA A

Pelo critério de divisibilidade por 3 no primeiro número, temos que $3|7+4+A+5+2+B+1 = 19+A+B$ e $A+B$ deve deixar resto 2 na divisão por 3. Usando no segundo número $3|3+2+6+A+B+4+C = 15+A+B+C$ e $A+B+C$ deve deixar resto 0 na divisão por 3. Das duas informações, concluímos que C deixa resto 1 por 3 e o único número entre os números nos itens com essa propriedade é 1 no item A.

20. ALTERNATIVA B

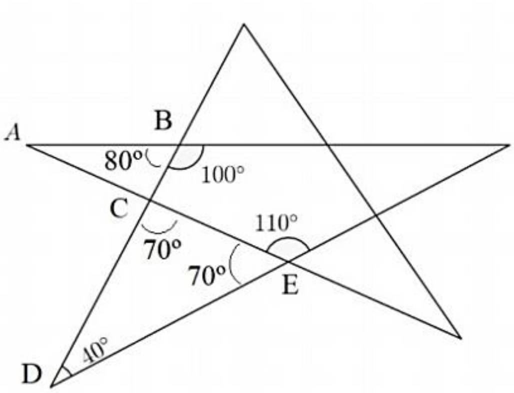
Usando produtos notáveis, sabemos que $2015^3 - 1 = (2015+1)(2015^2 + 2015 - 1)$ e que $2016^2 = (2015+1)^2 = 2015^2 + 2.2015 + 1$. Logo, a expressão pode ser desenvolvida

$$\frac{2015^3 - 1^3}{1^2 + 2015^2 + 2016^2} = \frac{(2015-1).(2015^2+2015+1)}{1+2015^2+2015^2+2.2015+1} = \frac{(2014).(2015^2+2015+1)}{2(2015^2+2015+1)} = \frac{2014}{2}$$

Portanto, a resposta é 1007.

21. ALTERNATIVA B

Veja a figura a seguir



Temos dois ângulos sobre reta no ponto E, um é $110°$ e o outro $180° - 110° = 70°$. Da mesma forma, no ponto B temos um ângulo $100°$ e o outro $180° - 100° = 80°$. Somando os ângulos internos do triângulo CDE, encontramos $\angle C = 180° - 40° - 70° = 70°$. Para determinar o ângulo A podemos usar a soma dos ângulos internos do triângulo ABC : $\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 80° - 70° = 30°$.

22. ALTERNATIVA E

Multiplicando as duas primeiras expressões e dividindo o resultado pela terceira, temos

$$\frac{PAPAI\ x\ GALO}{PAPAGAIO} = \frac{12.5}{24} \rightarrow L = \frac{5}{2}$$

23. ALTERNATIVA E

Procedendo a divisão de polinômios, teremos que

$$(4x^2+7x+8)\div(x+1)=4x+3+\frac{5}{x+1}$$

Para termos $\frac{5}{x+1}\in\mathbb{Z}_+^*$, precisamos que $x+1$ seja fator de 5, o que gera o maior x como 4.

24. ALTERNATIVA B

Note que

$$x+\frac{1}{x}=4$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=16-2=14$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3x-3x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}+3x+\frac{3}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=64-3.4=52$$

Portanto

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x^3+\frac{1}{x^3}=14+52=66$$

25. ALTERNATIVA E

Usando o terorema dos Bicos, temos $47°+122°+x=90°+90°\rightarrow x=11°$.

26. ALTERNATIVA E

Seja a_n o contorno da figura n. Por exemplo, $a_1=4, a_2=8$ e assim por diante. Observe que de uma figura n para a seguinte de número $n+1$ fazemos 3 cópias da figura n e perdemos 4 unidades, pois fazemos duas conexões entre as figuras, cada conexão perde uma unidade de cada figura. Portanto,

$$a_{n+1}=3a_n-4$$

Assim,

$$a_3=3.8-4=20; a_4=3.20-4=56; a_5=3.56-4=164; a_6 3.164-4=488$$

OBS: podemos maipular a recorrência para $a_{n+1}-2=3a_n-6=3(a_n-2)$ e a_n-2 é uma PG. Assim, $a_n-2=3^{n-1}(a_1-2)\rightarrow a_n=3^{n-1}(4-2)+2=2.3^{n-1}+2$ que é a fórmula geral dessa sequência.

27. ALTERNATIVA C

1ª Resolução:

Veja que 100 deixa resto 1 por 99 e, portanto, $ab.100^2+20.100+16$ deixa o mesmo resto que $ab+20+16=ab+36$. Como esse resultado é múltiplo de 99, temos que ab deixa resto $99-36=63$ na divisão por 99. O único número de 2 algarismos com esse resto por 99 é o próprio 63. Logo, $a=6$ e $b=3$.

2ª Resolução:
De início, perceba que $0 < a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$; e, eplos critérios de divisibilidade por 11 e por 9, devemos ter

$$\begin{cases} 11|(a+2+1)-(b+0+6) = a-b-3 \\ 9|a+b+2+0+1+6 = a+b+9 \end{cases}$$

Como $a + b \leq 18$, as únicas possibilidades que satisfazema última relação de divisibilidade são :

I) $a + b = 9$, gerando

$$11|a-b-3$$
$$11|(9-b)-b-3$$
$$11|6-2b = 2(3-b)$$

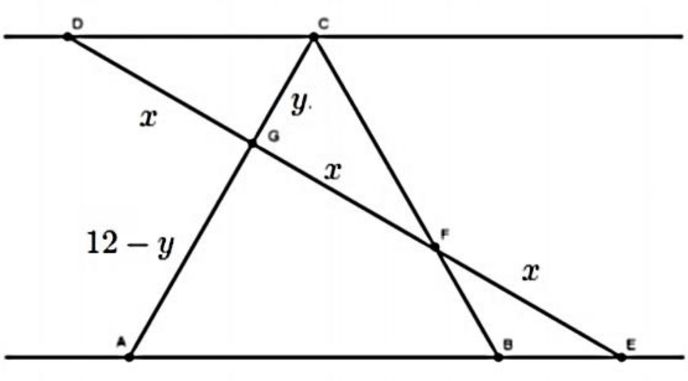
Cujo único dígito que resolve essa relação é $b = 3$, resultando em $a = 6$; e

II) $a + b = 18$, o que resulta em $a = b = 9$ e $11|9-9-3 = -3$ (um absurdo)

A única solução possível é $a = 6$ e $b = 3$.

28. ALTERNATIVA A

Sejam $DG = GF = FE = x$ e $GC = y$. Como ABC é equilátero temos $AC = AB = 12$ e $AG = AC - GC = 12 - y$.



Como os segmentos CD e AB são paralelos os triângulos DCG e EAG possuem todos os ângulos iguais e são semelhantes. Daí

$$\frac{CG}{AG} = \frac{GD}{GE} \rightarrow \frac{y}{12-y} = \frac{x}{2x} \rightarrow y = 4$$

29. ALTERNATIVA B

$$\overline{ab2016} = \overline{ab} + 2016 = 99k$$
$$= 99k + 2016$$
$$\overline{ab} = 99(k+20) + 36$$
$$\overline{ab} - 36 = 99(k+20)$$

O único número de 2 algarismo de dividido por 99 deixa resto 36 é o próprio 36, logo

$$\overline{ab} = 36 \Rightarrow a = 3 \ e \ b = 6$$

30. ALTERNATIVA D

Sejam a e b a altura e a base desse retângulo. Do perímetro temos $100 = 2a + 2b \rightarrow a + b = 50$ e da diagonal temos $a^2 + b^2 = x^2$. Desejamos calcular a área ab, mas usando essas equações e produtos notáveis

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2} = \frac{50^2 - x^2}{2} = 1250 - \frac{x^2}{2}$$

31. ALTERNATIVA B

Como a linha k tem k ímpares o último número dessa linha é o ímpar de posição $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Olhando para a linha anterior o último número é o ímpar de posição $1 + 2 + \cdots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$. Como 2013 é o ímpar de posição 1007, pois $2013 = 2.1007 - 1$, queremos encontrar k tal que

$$\frac{k(k-1)}{2} < 1007 \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

Veja o produto $k(k+1)$ deve ser maior ou igual a $2\,.\,1007 = 2014$ e é aproximadamente k^2. Como $k^2 > 2014 \rightarrow k \geq 45$, pois $45^2 = 2025$ e $44^2 = 1936$. Testando $k = 45$ temos

$$\frac{44.45}{2} = 990 < 1007 \leq 1035 = \frac{45.46}{2}$$

Portanto, 2013 está na linha 45.

32. ALTERNATIVA D

A soma dos dígitos aumenta 1 quando o dígito das unidades é menor que 9. Quando o dígito das unidades é 9 a soma aumenta 1, mas subtrai 9 para cada vai um que for feito para as casas das esquerda. Por exemplo, a soma dos dígitos de 399 é $3 + 9 + 9 = 21$ e a soma dos dígitos de 400 é $3 + 9 + 9 + 1 - 9 - 9 = 4$, pois existe dois vai um.
No nosso problema, preisamos que a soma dos dígitos dos números consecutivos seja múltiplo de 5, então $1 - 9x$ deve ser múltiplo de 5 onde x é a quantidade de vai um. O menor x que satisfaz essa divisibilidade é $x = 4$. Veja que $1 - 9.4 = -35$. O menor número com soma dos dígitos divisível por 5 que termina em 4 noves é 49999. Logo, a lista de Juliana terminou em 49999 e 50000. A soma dos dígitos do penúltimo número é $4 + 9 + 9 + 9 + 9 = 40$.

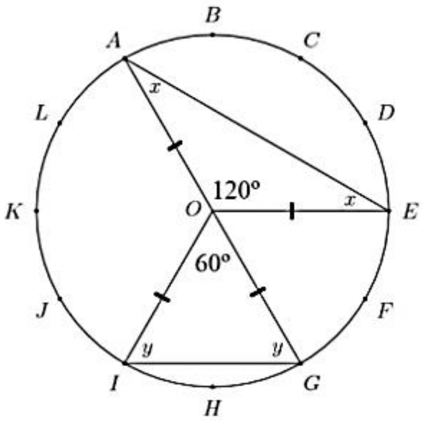
33. ALTERNATIVA A

Podemos manipular cada par de parcelas para obter $-(2k-1)x2k + 2k(2k+1) = 2k\big(-(2k-1) + (2k+1)\big) = 4k$. Por exemplo, $-1x2 + 2x3 = 2(-1+3) = 4 = 4.1$ e $-3x4 + 4x5 = 4(-3+5) = 4.2$. Assim,

$$\frac{-1x2 + 2z3 - \cdots + 50x51}{1 + 2 + \cdots + 25} = \frac{4.1 + 4.2 + \cdots + 4.25}{1 + 2 + \cdots + 25} = 4$$

34. ALTERNATIVA C

Note que $OA = OE = OG = OI$. Os dois triângulos isósceles e os ângulos das bases são iguais. A volta completa de 360° foi dividida igualmente em 12 partes, logo cada parte mede 30°. Pelas quantidades de partes podemos concluir que $\angle AOE = 4.30° = 120°$ e $\angle GOI = 2.30° = 60°$.



Somando os ângulos do triângulo AOE, temos $2x + 120 = 180° \to x = 30°$ e somando os ângulos do GOI, temos $2y + 60 = 180 \to y = 60°$. Portanto, $x + y = 30° + 60° = 90°$.

35. ALTERNATIVA C

Pela diferença de cubos, temos que

$$2^{24} - 1 = (2^8 - 1)(2^{16} + 2^8 + 1)$$

e pela diferença de quadrados, chegamos a

$$2^{16} - 1 = (2^8 - 1)(2^8 + 1)$$

Observe que $mdc(2^{16} + 2^8 + 1, 2^8 + 1) = 1$, então o maior número primo que divide ambos é fator de 255, que é 17.

36. ALTERNATIVA A

Seja S a soma dada. Para descobrir o algarismo das dezenas de S basta usarmos módulo 100. Temos

$$S \equiv 7 + 77 + \cdots + 77 \equiv 7 + 77.76 \equiv 5859 \equiv 59(mod\ 100)$$

Portanto, S termina em 59 e possui algarismo das dezenas igual a 5.

37. ALTERNATIVA C

Veja que $(x-a)^2 = b^2 \to (x-a)^2 - b^2 = 0 \to (x-a-b)(x-a+b) = 0$. O produto é zero quando um dos fatores é zero. Portanto, $x - a - b = 0 \to x = a + b$ ou $x - a + b = 0 \to x = a - b$.
O conjunto verdade é $\{a + b, a - b\}$.

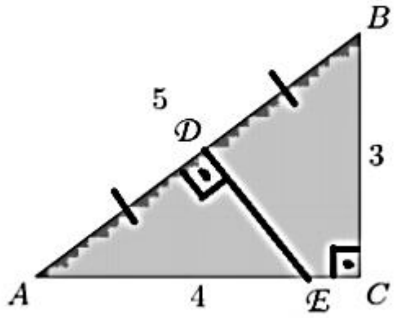
38. ALTERNATIVA E

Podemos reescrever o primeiro membro como

$$49^2 - 20^2 + 46^2 - 17^2 + 37^2 =$$
$$(49 - 20)(49 + 20) + (46 - 17)(46 + 17) + 37^2 =$$
$$29.(132) + 37^2 =$$
$$2.29.66 + (66 - 29)^2 =$$
$$= 29^2 + 66^2$$

O que permite concluir que $x = 29\ e\ y = 66$, gerando $x + y = 29 + 66 = 95$.

39. ALTERNATIVA D



Como $3^2 + 4^2 = 5^2$ sabemos que $\angle ACB = 90°$ pelo teorema de Pitágoras. Veja que $\angle ADE = 90°$ e a dobra DE divide AB no meio, pois o seguimento AD tem que sobrepor exatamente DB implicando $AD = DB = \frac{5}{2}$ e $\angle ADE = \angle BDE = \frac{180}{2}$.

Veja que os triângulos ADE e ACB são semelhantes, ângulos $\angle DAE = \angle CAB = \angle A$ e $\angle ADE = \angle ACB = 90°$. Logo

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{DE}{3} = \frac{\frac{5}{2}}{4} \rightarrow DE = \frac{15}{8}$$

40. ALTERNATIVA B

Seja $\angle BAD = x$. Veja que $\angle CDA = x$, por simetria. O ângulo interno do dodecágono é $\frac{(12-2)180°}{12} = \frac{10.180°}{12} = 150°$. Assim, $\angle ABC = BCD = 150°$. Pela soma dos ângulos internos do quadrilátero $ABCD$, temos

$$2x + 2.150° = 360° \rightarrow x = 30°$$