GABARITO					
1	A	B	**C**	D	E
2	**A**	B	C	D	E
3	A	**B**	C	D	E
4	A	**B**	C	D	E
5	A	B	**C**	D	E
6	A	B	**C**	D	E
7	A	B	C	**D**	E
8	A	**B**	C	D	E
9	A	**B**	C	D	E
10	A	B	C	D	**E**
11	A	B	C	**D**	E
12	A	**B**	C	D	E
13	A	**B**	C	D	E
14	A	B	C	D	**E**
15	A	**B**	C	D	E

1. C

Perceba que a soma dos quadrados de três números reais é zero se e somente se todos forem iguais a zero. Assim:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad z = 3\,, x = 1\,, y = 1 \rightarrow \quad x + y + z = 5$$

2. A

Sejam x e y os números em questão: $x^2 - y^2 = 21 \longrightarrow (x+y)(x-y) = 21$

Como x e y são números naturais, a sua soma é natural e a diferença um inteiro:

$$(x + y)(x - y) = 7.3 \text{ ou } (x + y)(x - y) = 21.1$$

Se $(x+y)(x-y) = 21.1$: $x + y = 21$ e $x-y =1 \longrightarrow x = 11$ e $y = 10 \longrightarrow x^2 + y^2 = 221$ (não há nas alternativas)

: $x + y = 1$ e $x - y = 21 \longrightarrow x = 11$ e $y = -10$, não convém, pois y é natural.

Se $(x+y)(x-y) = 7.3$: $x + y = 7$ e $x - y = 3 \longrightarrow x = 5$ e $y = 2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 29$ (há nas alternativas)

: $x + y = 3$ e $x - y = 7 \longrightarrow x = 5$ e $y =-2$, não convém, pois y é natural.

3. B

O número pensando será da forma $100x + 10y + z$.

Portanto:

$$S = (10x + y) + (1x + z) + (10y + x) + (10y + z) + (10z + x) + (10z + y)$$
$$S = 22(x + y + z)$$

como $R = x + y + z$, temos:

$$\frac{S}{R} = \frac{22(x+y+z)}{x+y+z} = 22$$

4. B

$$x = \sqrt{7 - 4.\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \sqrt{4 - 4.\sqrt{3} + 3} + \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 2.2.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} + \sqrt{3} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{3} = 2$$

Logo, x é um número racional.

5. C

Desenvolvendo a expressão dada, tem-se:

$$N = 2^{48} - 1 = \left(2^{24} - 1\right) \cdot \left(2^{24} + 1\right) = \left(2^{12} - 1\right) \cdot \left(2^{12} + 1\right) \cdot \left(2^{24} + 1\right) = \left(2^{6} - 1\right) \cdot \left(2^{6} + 1\right) \cdot \left(2^{12} + 1\right) \cdot \left(2^{24} + 1\right)$$
$$N = 2^{48} - 1 = \left(2^{3} - 1\right) \cdot \left(2^{3} + 1\right) \cdot \left(2^{6} + 1\right) \cdot \left(2^{12} + 1\right) \cdot \left(2^{24} + 1\right)$$
$$N = (7) \cdot (9) \cdot (65) \cdot \left(2^{12} + 1\right) \cdot \left(2^{24} + 1\right)$$

Logo, pode-se concluir que o número N não é primo (pois é divisível por 7, 9 e 65, pelo menos), não é par (pois é resultado de multiplicações de números ímpares), é múltiplo de $2^{24} + 1$, é divisível por 9 e é múltiplo de 7.

6. C

$$\sqrt{32 + 10\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}} = \sqrt{25 + 2.5.\sqrt{7} + 7} + \sqrt{25 - 2.5.\sqrt{7} + 7} = \sqrt{\left(5 + \sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(5 - \sqrt{7}\right)^2}$$
$$= 5 + \sqrt{7} + 5 - \sqrt{7} = 10$$

7. D

Se no ano N o 300º dia é terça feira, no ano N – 1 foi segunda feira. Para determinarmos o 100º dia devemos fazer 300 – 7. 29 = 97. Logo, o 97º será uma segunda feira também e o centésimo dia será quinta feira.

8. B

Calculando:

$$\begin{aligned} &b \cdot c = ? \\ &a + b + c + d = 16 \\ &\left.\begin{aligned} &a + b + c = d \\ &a = b + c \end{aligned}\right\rangle 2a = d \end{aligned}$$

Logo,

$$a + a + 2a = 16 \rightarrow 4a = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow d = 8$$
$$b + c = 4;\ b \neq c \rightarrow \left\langle \begin{aligned} &b = 3;\ c = 1 \\ &\text{ou} \\ &b = 1;\ c = 3 \end{aligned} \right.$$
$$b \cdot c = 3 \cdot 1 = 3$$

9. B

De acordo com a tabela, temos:

$$n = 12x + 11 \Rightarrow n + 1 = 12(x + 1)$$
$$n = 20y + 19 \Rightarrow n + 1 = 20(x + 1)$$
$$n = 18z + 17 \Rightarrow n + 1 = 18(x + 1)$$

$$\text{mmc}(12,20,18) = 180$$

Concluímos então que, n + 1 é o maior múltiplo de 180 que é menor que 1200. Portanto, $n + 1 = 1080 \Rightarrow n = 1079$. A soma dos algarismos de *n* será dada por: 1 + 0 + 7 + 9 = 17.

10. E

Seja x quantia de dinheiro com que ele saiu de casa, temos:

$$x + 20 - \left(\frac{x+20}{2}\right) - 10 - \frac{\left(x + 20 - \left(\frac{x+20}{2}\right) - 10\right)}{2} - 10 = 50$$

$$(x + 20) - \frac{(x+20)}{2} - 10 - \frac{\left(\frac{2x+40}{2} - \frac{x+20}{2} - \frac{20}{2}\right)}{2} - 10 = 50$$

$$(x + 20) - \frac{(x+20)}{2} - 10 - \frac{\left(\frac{2x+40-x-20-20}{2}\right)}{2} - 10 = 50$$

$$\frac{4x+80}{4} - \frac{(2x+40)}{4} - \frac{40}{4} - \frac{x}{4} - \frac{40}{4} = \frac{200}{4}$$
$$4x + 80 - 2x - 40 - 40 - x - 40 = 200$$
$$4x - 2x - x + 80 - 40 - 40 - 40 = 200$$
$$x - 40 = 200$$
$$x = 240$$

Segue o passo a passo dos gastos:

i) $240 + 20 = 260$

ii) $260 - \frac{260}{2} = 130$

iii) $130 - 10 = 120$

iv) $120 - \frac{120}{2} = 60$

v) $60 - 10 = 50$

11. D

A produção P das duas máquinas juntas será (considerando o tempo em minutos): $P = \frac{n}{160}$

A produção de $n/2$ peças da máquina A funcionando sozinha será: $P_A = \frac{n/2}{120} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{120} \rightarrow P_A = \frac{n}{240}$

A produção de $n/2$ peças da máquina B funcionando sozinha durante o tempo t será:

$$P_B = \frac{\cancel{n}/2}{t} = \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{t} \to P_B = \frac{n}{2t}$$

Se a velocidade de produção é constante, então pode-se escrever:

$$\frac{n}{160} = P_A + P_B$$
$$\frac{n}{160} = \frac{n}{240} + \frac{n}{2t} \to \frac{n}{160} = \frac{n\cdot(t+120)}{240t} = \frac{1}{160} = \frac{t+120}{240t} \to 80t = 19200 \to t = 240 \text{ minutos}$$

12. B

A equação $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$ é equivalente a $mn - 2m - 4n + 8 = 8 \Leftrightarrow (m-4)(n-2) = 8$, seguindo os modelos propostos nesta seção. As possibilidades são:

i. $m - 4 = 1$, $n - 2 = 8$;
ii. $m - 4 = 2$, $n - 2 = 4$;
iii. $m - 4 = 4$, $n - 2 = 2$;
iv. $m - 4 = 8$, $n - 2 = 1$;

ou seja, os pares ordenados (m, n) são (5, 10); (6, 6); (8, 4); (12, 3).

13. B

Sabemos que $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.x.\frac{1}{x} = 7$. Analogamente, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 7^2 - 2 = 47$. Além disso, fazendo

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x}$$

encontramos $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$.

Agora, usando que

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x^3 + \frac{1}{x^3}$$

finalmente encontramos $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$.

14. E

Façamos a seguinte expansão.

$$(x + y + x)^2 = [x + (y + z)]^2 = x^2 + 2x(y + z) + (y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$(x + y + x)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Então, encontramos que

$$\mathrm{xy + xz + yz} = \frac{(\mathrm{x+y+z})^2 - (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)}{2}$$

Substituindo os valores, chegamos na resposta,

$$\frac{4^2 - 6}{2} = 5$$

15. B

$$\underbrace{\sqrt[3]{\mathrm{x}}}_{\mathrm{a}} + \underbrace{\sqrt[3]{7-\mathrm{x}}}_{\mathrm{b}} = 3$$

É sabido que: $\mathrm{a}^3 + \mathrm{b}^3 = (\mathrm{a+b})(\mathrm{a}^2 - \mathrm{ab} + \mathrm{b}^2) \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{a}^3 + \mathrm{b}^3 = (\mathrm{a+b})([\mathrm{a+b}]^2 - 3\mathrm{ab})$

Substituindo, temos: $7 = (3).(9 - 3\mathrm{ab}) \quad => \quad \mathrm{ab} = 20/9$

No entanto, $\mathrm{ab} = (\sqrt[3]{\mathrm{x}}).(\sqrt[3]{7-\mathrm{x}}) \quad => \quad x^2 - 7x + \left(\frac{20}{9}\right)^3 = 0$, Note que $\Delta > 0$.

Logo, a equação possui duas soluções reais.